Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

В.С.ГРИЦЕВИЧ

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ДЕМОГЕОГРАФІЇ

Текст лекції

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2003

Грицевич В.С. Математичні моделі в демогеографії: Текст лекції -Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003. -30 с.

У тексті лекції подані основи лінійної алгебри, які широко використовують у математико-географічних дослідженнях і розглянуті три математичні моделі з демогеографії. Приводяться приклади використання цих моделей для реальних географічних об'єктів.

Для викладачів, аспірантів, магістрів, студентів та бакалаврів географічних та економічних спеціальностей.

Рекомендовано до друку Вченою радою
Львівського національного університету імені Івана Франка.
Протокол №1 від 11.09.2002

Рецензенти:

О.Б.Загульська, канд. геогр. наук
(Львівський національний університет імені Івана Франка);
М.С.Дністрянський, канд. геогр. наук
(Львівський національний університет імені Івана Франка);

ПЕРЕДМОВА

Сьогодні зростає роль математичної географії як ефективного засобу, що описує та пояснює територіальну мінливість явищ і процесів.

Математичне моделювання виконує багато важливих функцій, серед яких варто виділити такі:

- пізнання властивостей об'єкта, особливо тих, що недоступні безпосередньому спостереженню;
- перевірка гіпотез про об'єкт;
- побудова інших похідних чи синтетичних моделей;
- багатоваріантне прогнозування станів об'єкта у часовому, просторовому та факторному аспектах;
- проектування нового об'єкта із заданими або бажаними властивостями;
- оптимізація параметрів існуючого або нового об'єкта;
- визначення провідних тенденцій розвитку об'єкта у територіальному розрізі.

Важливим напрямом математико-географічних досліджень можуть бути методи, запозичені в економетрії. У 2000 р. американські вчені - Джеймс Хекман, професор Чиказького університету і Деніел Макфадден, професор Каліфорнійського університету одержали Нобелівську премію за економетрико-соціально-демографічні дослідження.

Джеймс Хекман досліджував ефективність соціальних програм. Він виявив, що трудова мотивація зайнятого працездатного населення може бути нижчою, ніж у безробітних, якщо заробітна плата менша від вартості того мінімуму благ, який потрібний людині для того, щоб почувати себе повноцінною особистістю. Такий висновок можна зробити і стосовно України.

Деніел Макфадден виявив, що трудовий вибір населення є ефективним тоді, коли, проблема трудової міграції є максимально спрощеною. Це пов'язує демографічну ситуацію з транспортним будівництвом.

Економетричні розрахунки - це ефективний засіб удосконалення суспільного менеджменту. Вони сприяють правильній оцінці впливу чинників на отримання певних результатів навіть в умовах багатоваріантності.

Ці розрахунки базуються на регресійних моделях, які відображають статистичні звязки між кількісними ознаками. Такі ознаки дуже часто зустрічаються в суспільно-географічних дослідженнях загалом і в демогеографічних зокрема, у тому числі в курсових, дипломних, магістерських та аспірантських роботах.

При вдумливому підході до наявного статистичного матеріалу майже завжди можна вийти на на побудову регресійних моделей. Подальша картографічна реалізація одержаних результатів істотно підвищує рівень будь-якої роботи.

При цьому обсяг обчислювальної роботи передбачає, як правило, застосування засобів комп'ютерної техніки, що має щонайменше два позитивних аспекти. По-перше, значно зменшується обсяг ручних обчислень, по-друге, студент чи аспірант глибше оволодіває практичними навиками роботи на персональному комп'ютері.

Ми розглянемо застосування математико-географічних підходів до ідентифікації та інтерпретації відомих демографічних моделей - моделі Кларка для ідеального міста; моделі Ціпфа для системи розселення; моделі Медведкова для маятникових міграцій.

Спочатку пригадаємо основи лінійної алгебри, на підставі якої побудоване подальше викладення матеріалу.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Матриці та операції над ними

Матриця - це прямокутна таблиця чисел. В суспільній географії матриці використовують для подання числової інформації про елементи територіальних систем, а також для моделювання зв'язків між елементами системи.

У розгорнутому вигляді матриця має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} & \cdots & x_{MN} \end{pmatrix}.$$

Тут показана матриця, яка має M рядків і N стовпців. Матриці позначають великими буквами $X, Y, Z, A, B, C, ...$ і т.д.

За формою матриці бувають *прямокутні*, *квадратні* (коли кількість стовпців дорівнює кількості рядків), *матриці-стовпці* (коли є лише один стовпець), *матриці-рядки* (коли є лише один рядок). Матриці-стовпці часто називають векторами.

Серед квадратних матриць окремо виділяють симетричні матриці (в яких елементи однакові щодо головної діагоналі, тобто $x_{ji} = x_{ij}$) і діагональні (в яких ненульові елементи є лише на головній діагоналі, а всі інші елементи дорівнюють нулю).

При виконанні матричних операцій важливою є нульова матриця (всі елементи якої дорівнюють нулю):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

а також одинична матриця (в якої на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Одиничну матрицю часто позначають символом E.

Дві матриці називаються рівними, якщо рівними є попарно всі їхні елементи.

Над матрицями однакового розміру можна виконувати операції додавання та віднімання.

Нехай є дві матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} & \cdots & x_{MN} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{M1} & y_{M2} & \cdots & y_{MN} \end{pmatrix}.$$

Сумою $X+Y$ вважають матрицю

$$\begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & \cdots & x_{1N}+y_{1N} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} & \cdots & x_{2N}+y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1}+y_{M1} & x_{M2}+y_{M2} & \cdots & x_{MN}+y_{MN} \end{pmatrix},$$

а різницею $X-Y$ матрицю

$$\begin{pmatrix} x_{11}-y_{11} & x_{12}-y_{12} & \cdots & x_{1N}-y_{1N} \\ x_{21}-y_{21} & x_{22}-y_{22} & \cdots & x_{2N}-y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1}-y_{M1} & x_{M2}-y_{M2} & \cdots & x_{MN}-y_{MN} \end{pmatrix}.$$

Матрицю можна множити на число. Таке множення відбувається покомпонентно. Нехай α - скаляр, X - матриця розміру $M \times N$, тоді

$$\alpha \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_{11} & \alpha \cdot x_{12} & \cdots & \alpha \cdot x_{1N} \\ \alpha \cdot x_{21} & \alpha \cdot x_{22} & \cdots & \alpha \cdot x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot x_{M1} & \alpha \cdot x_{M2} & \cdots & \alpha \cdot x_{MN} \end{pmatrix}.$$

Особливою операцією є добуток двох матриць. Для того щоб дві (загалом прямокутні) матриці (наприклад, A та B) можна було перемножити, треба, щоб кількість стовпців першої матриці дорівнювала кількості рядків другої матриці.

Нехай матриця A має розмір $M \times L$, матриця B розмір $L \times N$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{ML} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{L1} & b_{L2} & \cdots & b_{LN} \end{pmatrix}.$$

Добутком матриць A та B вважають матрицю

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M1} & c_{M2} & \cdots & c_{MN} \end{pmatrix},$$

розміром $M \times N$, де $c_{ij} = \sum_{k=1}^{L} a_{ik} b_{kj}$, і позначають $C = A \cdot B$.

Виконання операцій за цією формулою часто називають правилом множення "рядок на стовпчик".

Легко бачити, що коли множимо дві квадратні матриці однакового розміру, отримуємо квадратну матрицю такого самого розміру. Множачи прямокутної матриці на матрицю-стовпець отримуємо матрицю-стовпець. Якщо множимо матрицю-рядок на прямокутну матрицю то одержуємо матриця-рядок. Множачи матрицю-рядок на матрицю-стовпець отримуємо одне число. Коли множимо матрицю-стовпець на матрицю-рядок то одержуємо прямокутну матрицю.

Якщо $\overline{b}$ і $\overline{x}$ - два вектори, то вираз $\overline{b}^T \cdot \overline{x}$ називають лінійною формою, оскільки одержане скалярне значення є лінійною функцією від компонент вектора $\overline{x}$.

Множення матриць некомутативне, тобто, загалом

$$B \cdot A \neq A \cdot B.$$

Якщо A - довільна квадратна матриця, E - одинична, то завжди

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

У зв'язку з множенням матриць виникає поняття квадратичної форми. Нехай $\overline{x}$ - матриця-стовбець (вектор) довжиною M, відповідно $\overline{x}^T$ є матрицею-рядком, A - квадратна матриця розміром $M \times M$. Тоді легко бачити, що такий вираз $\overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x}$, який називається квадратичною формою, є числом

$$\overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \ .$$

Квадратна матриця B називається оберненою до квадратної матриці A, якщо їхній добуток дорівнює одиничній матриці, тобто

$$A \cdot B = B \cdot A = E \ .$$

Обернену матрицю позначають так: A^{-1} .

Над довільними матрицями можна виконувати операцію транспонування. Матриця, транспонована до матриці A, позначається A^T. При транспонуванні рядки матриці стають стовпцями і навпаки. Операція транспонування має такі властивості:

$$(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T \ , \ \ (A^T)^T = A \ , \ \ (A+B)^T = A^T + B^T \ , \ \ (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \ .$$

Матриці можуть виступати як аргументи математичних функцій. Найвідоміші серед них - *слід* і *визначник*. Ці функції визначають для квадратних матриць.

Слід квадратної матриці (позначається Tr) - це сума елементів її головної діагоналі. Якщо A - матриця розміром $M \times M$, то: $Tr(A) = \sum_{i=1}^{M} a_{ii}$. Слід має такі властивості:

$$Tr(0) = 0 \ , \quad Tr(E) = M \ , \quad Tr(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot Tr(A) \ ,$$
$$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B) \ .$$

Визначник квадратної матриці (позначається Det) це сума добутків її елементів, взятих по одному з кожного рядка та стовпця з відповідним знаком. Для найпростіших матриць розміру 2×2 і 3×3 визначники виглядають так:

$$Det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} ,$$

$$Det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} .$$

Визначник має такі властивості:

$$Det(0) = 0 , \quad Det(E) = 1 , \quad Det(\alpha \cdot A) = \alpha^M \cdot Det(A) ,$$
$$Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B) .$$

Розглянемо питання диференціювання матриць та їхніх виразів. При диференціюванні за скалярним аргументом похідна від матриці дорівнює просто матриці відповідних похідних, тобто

$$\frac{d}{dz} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M1} & c_{M2} & \cdots & c_{MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dc_{11}}{dz} & \frac{dc_{12}}{dz} & \cdots & \frac{dc_{1N}}{dz} \\ \frac{dc_{21}}{dz} & \frac{dc_{22}}{dz} & \cdots & \frac{dc_{2N}}{dz} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dc_{M1}}{dz} & \frac{dc_{M2}}{dz} & \cdots & \frac{dc_{MN}}{dz} \end{pmatrix} .$$

Диференціювання лінійних і квадратичних форм за векторним аргументом має такі властивості:

$$\frac{\partial(\bar{b}^T \cdot \bar{x})}{\partial \bar{x}} = \bar{b}^T , \quad \frac{\partial(\bar{x}^T \cdot A \cdot \bar{x})}{\partial \bar{x}} = 2 \cdot \bar{x}^T \cdot A , \quad \frac{\partial(\bar{x}^T \cdot A \cdot \bar{x})}{\partial \bar{x}^T} = 2 \cdot A \cdot \bar{x} ,$$

$$\frac{\partial^2(\bar{x}^T \cdot A \cdot \bar{x})}{\partial x \partial \bar{x}^T} = 2 \cdot A, \qquad \frac{\partial(\bar{x}^T \cdot A \cdot \bar{x})}{\partial A} = \bar{x} \cdot \bar{x}^T.$$

1.2. Розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь

Система лінійних алгебричних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n, \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - невідомі величини, значення яких потрібно знайти, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ - відомі коефіцієнти лівої частини системи, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - відомі коефіцієнти правої частини системи.

У матричному записі система лінійних алгебраїчних рівнянь виглядає так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

або в скороченому записі $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$,

де $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

У лінійній алгебрі відомо багато різних методів розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Розглянемо два часто вживані методи - оберненої матриці і Крамера. Зазначимо, що кожен метод призводить до розв'язання системи рівнянь лише тоді, коли визначник матриці системи відмінний від нуля, тобто $Det(A) \neq 0$. Якщо визначник цієї матриці дорівнює нулю, то розв'язку може взагалі не існувати, або розв'язків може бути безліч. Доцільно зауважити: якщо коректно застосовувати метод найменших квадратів, то проблем із системою рівнянь не виникає.

Метод оберненої матриці полягає в тому, що обидві частини матричного рівняння $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ домножують з лівого боку на обернену матрицю A^{-1}: $A^{-1} \cdot A \cdot \overline{x} = A^{-1} \cdot \overline{b}$. Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, де E - одинична матриця, то звідси випливає, що $\overline{x} = A^{-1} \cdot \overline{b}$. Остання рівність є формулою для розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь. Вона засвідчує, що стовпець розв'язків отримуємо як матричний добуток оберненої матриці A^{-1} на стовпець $\overline{b}$. Метод оберненої матриці простий і зручний, особливо при комп'ютерній реалізації, проте він потребує знання значень її елементів. Обчислення оберненої матриці становить окрему проблему і для її розв'язання існують свої методи.

Метод Крамера дуже вигідний для ручного розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь невеликого розміру, $n = 2{,}3$. Вже при $n = 4$ ним користуватися важче. За цим методом спочатку обчислюють значення визначника матриці системи $\Delta = Det(A)$, а далі обчислюють $x_1, x_2, \dots, x_n$ за формулою $x_i = \dfrac{\delta_i}{\Delta}$, де δ_i - визначник матриці, яка утворена з матриці A заміною її i-го стовпця на стовпець $\overline{b}$.

Розглянемо для прикладу розв'язання системи двох лінійних алгебричних рівнянь, яка неодноразово траплятиметься у подальшому викладенні. Нехай треба розв'язати систему:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2; \end{cases}$$

1. Обчислюємо визначник $\Delta = Det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

2. Обчислюємо $x_1 = \frac{1}{\Delta} \cdot Det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2}{\Delta}$

3. Обчислюємо $x_2 = \frac{1}{\Delta} \cdot Det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} = \frac{- a_{21} \cdot b_1 + a_{11} \cdot b_2}{\Delta}$.

1.3. Метод найменших квадратів для регресійних моделей

Метод найменших квадратів (МНК) використовують для визначення числових значень (ідентифікації) коефіцієнтів регресійних моделей. Ми розглянемо найпростіший випадок методу для одновимірної лінійної регресійної моделі, яка використовується у наступних параграфах.

Нехай r та v відповідно факторна та результуюча змінні і нам відомий масив M спостережень за ними, який можна подати у вигляді

Номер спостереження	Значення факторної змінної	Значення результуючої змінної
1	r_1	v_1
2	r_2	v_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
M	r_M	v_M

Лінійна трендова регресійна модель зв'язку між факторною та результуючою змінними за своєю суттю є регресійним рівнянням і має такий вигляд $v_{TP}(a,b,r) = a + b \cdot r$, де a,b - параметри регресійної моделі, які підбирають так, щоб модель "якнайкраще" описувала існуючі спостереження.

Суть методу найменших квадратів полягає у певній конкретизації та формалізації слова "якнайкраще". У цьому методі коефіцієнти a,b вибирають так, щоб сума квадратів відхилень трендових значень результуючої змінної від її фактичних значень була мінімальною. Легко бачити, що це відхилення для i-го спостереження записується так: $v_{TP}(a,b,r_i)-v_i$. Тому сума квадратів відхилень має вигляд

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{M}\left[v_{TP}(a,b,r_i)-v_i\right]^2 .$$

Перейдемо до матричного способу запису. Для цього зробимо такі позначення:

$$\bar{r}=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix},\quad \bar{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix},\quad \bar{v}_{TP}(a,b)=\begin{pmatrix} v_{TP}(a,b,r_1) \\ v_{TP}(a,b,r_2) \\ \vdots \\ v_{TP}(a,b,r_M) \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}(a,b)=\bar{v}_{TP}(a,b)-\bar{v} .$$

У прийнятих позначеннях можна записати $\bar{f}(a,b)=\bar{1}\cdot a+\bar{r}\cdot b-\bar{v}$, де $\bar{1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Останнє співвідношення дає змогу визначити похідні від $\bar{f}(a,b)$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial a} = \bar{1}\,, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial b} = \bar{r}\,.$$

У матричних позначеннях сума квадратів відхилень має вигляд

$$S(a,b) = \bar{f}^T(a,b) \cdot \bar{f}(a,b)\,.$$

Видно, що ця сума є математичною функцією від параметрів a,b. Згідно з методом найменших квадратів її потрібно мінімізувати за рахунок вибору значень параметрів a,b. З вищої математики відомо, що необхідною умовою мінімуму (екстремуму) функції є рівність нулю її частинних похідних. Тому обчислимо ці похідні.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial \bar{f}^T}{\partial a} \cdot \bar{f} + \bar{f}^T \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial a} = 2 \cdot \left[(\bar{1}^T \cdot \bar{1}) \cdot a + (\bar{1}^T \cdot \bar{r}) \cdot b - \bar{1}^T \cdot \bar{v} \right],$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial \bar{f}^T}{\partial b} \cdot \bar{f} + \bar{f}^T \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial b} = 2 \cdot \left[(\bar{r}^T \cdot \bar{1}) \cdot a + (\bar{r}^T \cdot \bar{r}) \cdot b - \bar{r}^T \cdot \bar{v} \right].$$

З необхідної умови мінімуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

і попередніх рівностей випливає система двох лінійних алгебричних рівнянь стосовноно параметрів a,b, яка у матричному записі має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} \bar{1}^T \cdot \bar{1} & \bar{1}^T \cdot \bar{r} \\ \bar{r}^T \cdot \bar{1} & \bar{r}^T \cdot \bar{r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1}^T \cdot \bar{v} \\ \bar{r}^T \cdot \bar{v} \end{pmatrix}.$$

2. МОДЕЛЬ КЛАРКА ДЛЯ ІДЕАЛЬНОГО МІСТА

Модель Кларка описує територіальну щільність населення ідеального міста. Вона має вигляд

$$D(r) = a \cdot e^{-br},$$

де $D(r)$ - щільність населення на відстані r від центра міста, a - параметр моделі, щільність у центрі міста; b - параметр моделі, що характеризує швидкість спадання $D(r)$ від центра до периферії.

Модель дає змогу описати розподіл населення у моноцентричному місті, де щільність населення найвища у центрі і поступово спадає від центра до периферії.

Для побудови моделі потрібно визначити коефіцієнти a та b. Щоб їх знайти використовують відому регресійну методику.

Нехай у місті є M мікрорайонів, для яких відома щільність населення. Позначимо через r_i відстань i-го мікрорайону від центра, через D_i - щільність населення в i-му мікрорайоні. Тоді наявну інформацію можна подати у вигляді таблиці:

Номер мікрорайону	Відстань від центра	Щільність населення
1	r_1	D_1
2	r_2	D_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
M	r_M	D_M

Модель Кларка нелінійна стосовно змінної r, та параметра b, тому безпосередньо застосувати метод найменших квадратів не можна. Спочатку прологарифмуємо обидві частини рівняння

$$\ln(D) = \ln(a) - b \cdot r$$

і зробимо позначення $w = \ln(D)$, $c = \ln(a)$.

У нових позначеннях модель має лінійний вигляд

$$w = c - b \cdot r \,.$$

Згідно з стандартною процедурою для визначення коефіцієнтів c та b отримуємо систему двох лінійних алгебричних рівнянь, яка у матричному записі виглядає

$$\begin{pmatrix} M & -S_r \\ S_r & -S_{rr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wr} \end{pmatrix},$$

де $S_r = \overline{r}^T \cdot \overline{1}$, $S_{rr} = \overline{r}^T \cdot \overline{r}$, $S_w = \overline{w}^T \cdot \overline{1}$, $S_{wr} = \overline{w}^T \cdot \overline{r}$,

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix}, \quad \overline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{pmatrix}, \quad \overline{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо розв'язок системи

$$\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & -S_r \\ S_r & -S_{rr} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wr} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} -S_{rr} & S_r \\ -S_r & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wr} \end{pmatrix},$$

де $\Delta = S_r^2 - M \cdot S_{rr}$.

Знаючи c визначаємо $a = e^c$.

Розглянемо приклад застосування моделі для Львова. Оскільки Львів не моноцентричне місто, то для усієї його території будувати модель Кларка недоцільно. Тому побудуємо її локально для певної частини міста. Якщо покрити територію Львова квадратами з довжиною сторони 1 км, то одержимо зручну сітку квадратів для визначення та моделювання щільності населення. Наприклад, у районі новобудов вул. Торфяної, така ситуація зі щільністю населення (тис. осіб/км^2)

	1	**2**	**3**
А	0.0	9.6	10.3
Б	6.3	26.0	9.1
В	9.9	10.6	10.0

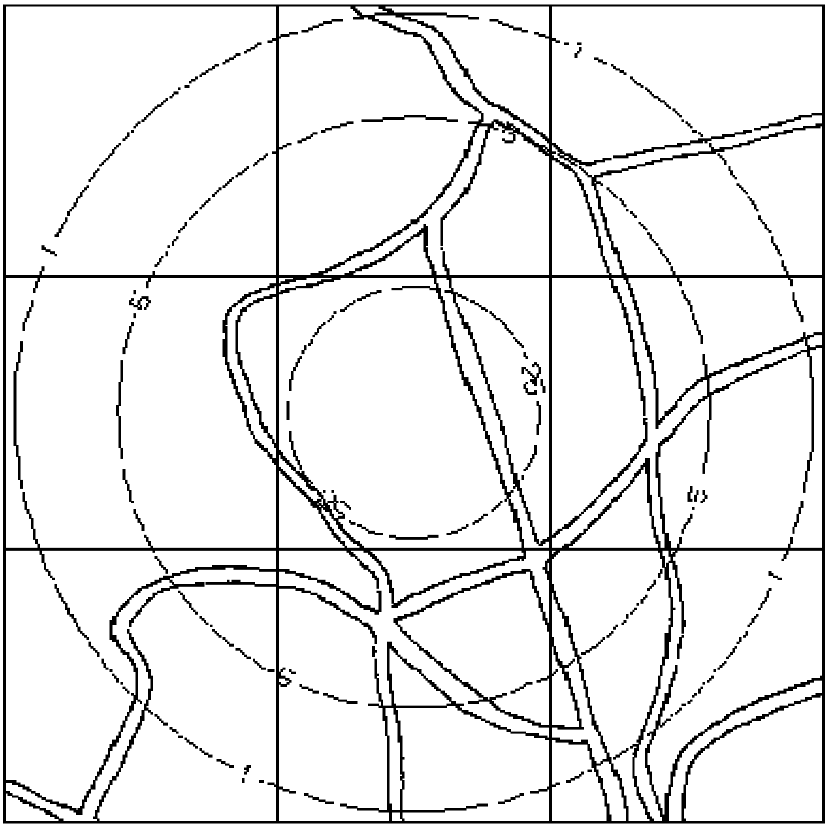
Відстань між центрами сусідніх квадратів по горизонталі та по вертикалі дорівнює 1 км, по діагоналі приблизно 1.4 км. Це дає змогу розв'язати задачу ідентифікації коефіцієнтів моделі Кларка. Запишемо таблицю значень.

Номер квадрата	Відстань від центра, км	Щільність населення
А1	1.4	0.0
А2	1.0	9.6
А3	1.4	10.3
Б1	1.0	6.8
Б2	0.0	26.3
Б3	1.0	9.1
В1	1.4	5.9
В2	1.0	10.6
В3	1.4	10.0

Виконавши обчислення, отримуємо $c = 3.58$, $b = -1.68$. Тому модель виглядає так:

$$D(r) = 35.87 \cdot e^{-1.68 \cdot r} .$$

Картографічно, використовуючи спосіб ізоліній, таке модельне поле щільності населення виглядає як сім'я концентричних кіл. Зокрема у цьому випадку



3. МОДЕЛЬ ЦІПФА ДЛЯ СИСТЕМИ РОЗСЕЛЕННЯ

Модель Ціпфа описує залежність між рангом та людністю поселень у територіальній системі розселення. Вона має вигляд

$$H(k) = a \cdot k^{-b}$$

де $H(k)$ - людність поселення, яке має ранг k, a,b - параметри (в ідеальному випадку a - людність поселення з рангом 1), b - характеризує швидкість зменшення людності зі збільшенням рангу.

Модель Ціпфа має емпіричний характер і наближено описує розподіл поселень за людністю у достатньо великій системі розселення. Для побудови моделі потрібно визначити коефіцієнти a та b. З цією метою використаємо відомі регресійні підходи.

Нехай у системі розселення є n поселень. Прорангуємо їх у порядку спадання людності від найбільш до найменш чисельного. Позначимо через N_k людність k-го поселення у рангованому ряду. Тоді наявну інформацію про систему розселення можна подати у вигляді

Ранг поселення	Людність поселення
1	N_1
2	N_2
.	.
.	.
.	.
n	N_n

Модель Ціпфа також нелінійна, тому перед застосуванням методу найменших квадратів її треба лінеаризувати. Для цього прологарифмуємо обидві частини рівності $\ln(H) = \ln(a) - b \cdot \ln(k)$ і зробимо позначення $w = \ln(H)$, $z = \ln(k)$, $c = \ln(a)$.

У нових позначеннях модель має лінійний вигляд

$$w = c - b \cdot z .$$

Відповідно до стандартної процедури для визначення коефіцієнтів c, b отримуємо систему двох лінійних алгебричних рівнянь, яку в матричному вигляді запишемо так:

$$\begin{pmatrix} n & -S_z \\ S_z & -S_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wz} \end{pmatrix},$$

де $S_z = \overline{z}^T \cdot \overline{1}$, $S_{zz} = \overline{z}^T \cdot \overline{z}$, $S_w = \overline{w}^T \cdot \overline{1}$, $S_{wz} = \overline{w}^T \cdot \overline{z}$, $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Розв'язуючи цю систему, отримуємо коефіцієнти c, b

$$\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & -S_z \\ S_z & -S_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wz} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} -S_{zz} & S_z \\ -S_z & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wz} \end{pmatrix},$$

де $\Delta = S_z^2 - n \cdot S_{zz}$ і коефіцієнт $a = e^c$.

Як приклад розглянемо модель Ціпфа для системи міського розселення України. У наведеній таблиці подамо ранг та людність для 100 перших міст України за даними перепису 2001 р.

Людність міст України

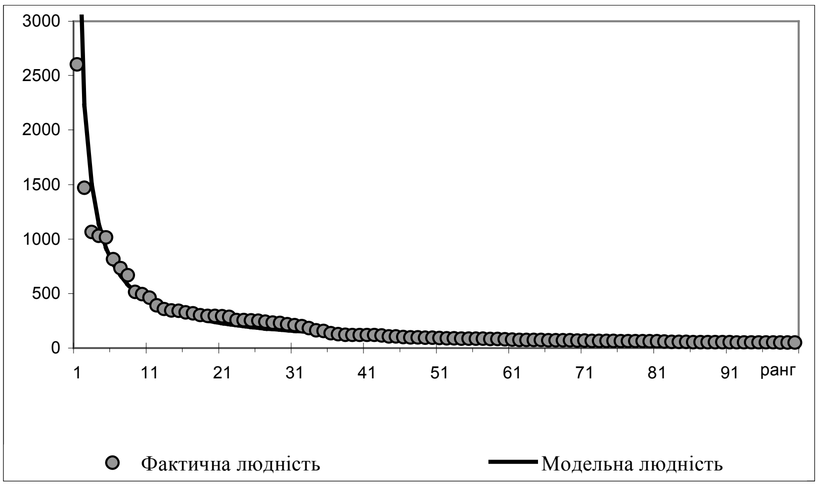
Ранг міста	Місто	Людність міста, тис. осіб (2001 р.)
1	2	3
1	Київ	2602
2	Харків	1470
3	Дніпропетровськ	1064
4	Одеса	1029
5	Донецьк	1016
6	Запоріжжя	814
7	Львів	732

1	2	3
8	Кривий Ріг	667
9	Миколаїв	514
10	Маріуполь	492
11	Луганськ	463
12	Макіївка	390
13	Вінниця	357
14	Сімферополь	343
15	Севастополь	341
16	Херсон	328
17	Полтава	318
18	Чернігів	301
19	Черкаси	295
20	Суми	293
21	Горлівка	292
22	Житомир	284
23	Дніпродзержинськ	256
24	Хмельницький	254
25	Кіровоград	253
26	Рівне	249
27	Чернівці	240
28	Кременчук	234
29	Тернопіль	228
30	Івано-Франківськ	218
31	Луцьк	209
32	Біла Церква	200
33	Краматорськ	181
34	Мелітополь	160
35	Керч	157
36	Нікополь	135
37	Слов'янськ	125
38	Бердянськ	121
39	Сєвєродонецьк	120
40	Алчевськ	119
41	Павлоград	119
42	Ужгород	118
43	Лисичанськ	115
44	Євпаторія	106
45	Єнакієве	104

1	2	3
46	Кам'янець-Подільський	100
47	Костянтинівка	95
48	Красний Луч	95
49	Олександрія	94
50	Конотоп	93
51	Стаханов	90
52	Умань	89
53	Бердичів	88
54	Бровари	87
55	Шостка	87
56	Ізмаїл	84
57	Артемівськ	83
58	Мукачеве	82
59	Ялта	81
60	Дрогобич	79
61	Ніжин	76
62	Феодосія	74
63	Свердловськ	73
64	Торез	73
65	Новомосковськ	72
66	Червоноград	71
67	Первомайськ	70
68	Сміла	70
69	Красноармійськ	69
70	Калуш	68
71	Коростень	67
72	Ковель	66
73	Дружківка	65
74	Прилуки	65
75	Рубіжне	65
76	Антрацит	64
77	Харцизьк	64
78	Лозова	63
79	Стрий	62
80	Коломия	61
81	Шахтарськ	60
82	Сніжне	59
83	Ізюм	56

1	2	3
84	Новоград-Волинський	56
85	Брянка	55
86	Бориспіль	54
87	Димитров	54
88	Іллічівськ	54
89	Нововолинськ	54
90	Ровеньки	54
91	Лубни	53
92	Білгород-Дністровський	52
93	Жовті Води	52
94	Комсомольськ	52
95	Нова Каховка	52
96	Фастів	52
97	Краснодон	51
98	Марганець	50
99	Охтирка	50
100	Ромни	50

У результаті обчислень отримуємо значення $c = 8.38$, $b = 0.97$. Тому остаточно модель Ціпфа для перших 100 міст України має вигляд $H(k) = 4359 \cdot k^{-0.97}$. Відповідність фактичних даних і моделі зображено на графіку



4. МОДЕЛЬ МЕДВЕДКОВА ДЛЯ МАЯТНИКОВИХ МІГРАЦІЙ

Модель Медведкова описує величину трудових маятникових міграцій в околі великого міста. Вона виглядає

$$V(H,r) = a \cdot \frac{H}{r^b},$$

де $V(H,r)$ - величина (кількість) мігрантів, H - людність поселення, з якого відбувається міграція до великого міста, r - відстань від поселення до великого міста, a,b - параметри (вважають, що параметр a пропорційний чисельності населення великого міста, а параметр b характеризує швидкість зменшення міграцій із віддаленням від великого міста).

Модель дає змогу оцінити типову величину щоденних трудових міграцій у зоні тяжіння великого міста.

Для побудови моделі потрібно визначити коефіцієнти a та b. У відповідності до регресійної методики, зробимо так.

Нехай навколо великого міста є M поселень, з яких приїжджають маятникові трудові мігранти. Позначимо через r_i відстань від i-го поселення до великого міста, через H_i людність i-го поселення, через V_i кількість маятникових мігрантів з i-го поселення. Наявну інформацію можна подати у вигляді

Номер поселення	Відстань до великого міста	Людність поселення	Кількість трудових мігрантів
1	r_1	H_1	V_1
2	r_2	H_2	V_2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
M	r_M	H_M	V_M

Перепишемо модель Медведкова у вигляді $\frac{V}{H} = a \cdot r^{-b}$ і прологарифмуємо її

$$\ln\left(\frac{V}{H}\right) = \ln(a) - b \cdot \ln(r) .$$

Далі зробимо позначення $w = \ln\left(\frac{V}{H}\right)$, $y = \ln(r)$, $c = \ln(a)$.

У нових позначеннях отримуємо лінійну модель

$$w = c - b \cdot z .$$

Остання рівність формально подібна до лінеаризованої моделі Ціпфа, тому розв'язок відповідної задачі буде аналогічним.

Коефіцієнти b, c визначають з системи двох лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} M & -S_y \\ S_y & -S_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wy} \end{pmatrix},$$

де $S_y = \overline{y}^T \cdot \overline{1}$, $S_{yy} = \overline{y}^T \cdot \overline{y}$, $S_w = \overline{w}^T \cdot \overline{1}$, $S_{wy} = \overline{w}^T \cdot \overline{y}$, $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Розв'язуючи її, одержимо

$$\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & -S_y \\ S_y & -S_y \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wy} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} -S_{yy} & S_y \\ -S_y & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_w \\ S_{wy} \end{pmatrix}, \quad a = e^c$$

де $\Delta = S_y^2 - M \cdot S_{yy}$.

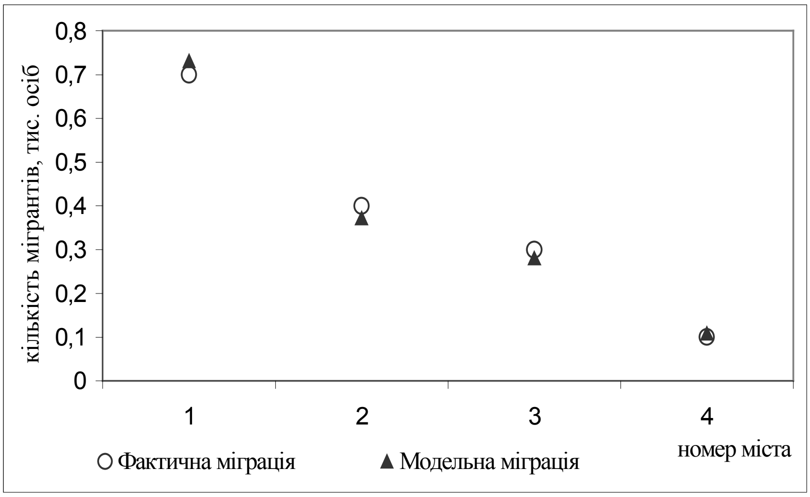
Для прикладу розглянемо маятникову міграцію для деяких міст приміської зони міста Львова на підставі даних, опублікованих в [6].

№	Назва міського поселення	Відстань до Львова, км	Людність поселення тис. осіб	Кількість трудових мігрантів, тис. осіб
1	Городок	27,2	17,5	0,7
2	Миколаїв	34,9	16,3	0,4
3	Кам'янка-Бузька	37,5	14,0	0,3
4	Перемишляни	42,7	7,6	0,1

Виконавши обчислення, отримуємо $c = 5.844$, $b = 2.69$. Отже, модель Медведкова для розглянутої групи міських поселень приміської зони міста Львова така

$$V(H,r) = 345 \cdot \frac{H}{r^{2.69}}.$$

На графіку зображено відповідність між фактичною та модельною кількістю трудових мігрантів



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Шаблій О.І.* Математичні методи в соціально-економічній географії. –Львів: Світ, 1994.

2. *Голиков А.П., Черванев И.Г., Трофимов А.М.* Математические методы в географии. –Харків: Вища шк. Вид-во при Харк. ун-ті, 1986.

3. *Архипов Ю.Р., Блажко Н.И., Григорьев С.В., Заботин Я.И., Трофимов А.М., Хузеев Р.Г.* Математические методы в географии: Учебное пособие. –Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1976.

4. *Толбатов Ю.А.* Економетрика. –К.: Четверта хвиля, 1997.

5. *Єлейко В.* Основи економетрії. –Львів: ТзОВ Марка Лтд, 1995.

6. *Ковтун В.В., Степаненко А.В.* Города Украины. Экономико-географический справочник. –К.: Вища шк., 1990.

7. *Грицевич В.С.* Методичні вказівки до застосування математичних методів при виконанні курсових і дипломних робіт студентами 4-5 курсів географічного факультету спеціальності "Економічна і соціальна географія". (Одновимірний регресійний аналіз). -Львів: Ред.-вид. відділ Львів. ун-ту. 1995.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Володимир Степанович Грицевич

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ДЕМОГЕОГРАФІЇ
Текст лекції

Редактор Н.Й.Плиса
Комп'ютерний набір і верстка В.С.Грицевич
Технічний редактор С.З.Сеник
Коректор ____________

Підп. до друку .Формат 60х84.16. Папір друк. Друк на різогр.
Умовн.-друк. арк. . Тираж 100. Зам .
Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка. 79000. Львів, вул. Дорошенка, 41.